Μια απεικόνιση είναι ένα διατεταγμένο ζεύγος (A,B) υπό τη σχέση R (συμβολικά: $((A,B),R)$) όπου A, B είναι σύνολα και R συνάρτηση μεταξύ των A και B με πεδίο ορισμού $\mathcal{D}(R)=A$.

Εάν λοιπόν $f=((A,B),R)$ είναι μία <u>απεικόνιση</u> τότε λέμε ότι η f είναι μία απεικόνιση από το A στο B με A το πεδίο ορισμού της f, B το πεδίο αφίξεων της f και R το γράφημα της f (αφού αν R συνάρτηση τότε $(\forall x\in\mathcal{D}(R))(\exists! y):(x,y)\in R$ ή αλλιώς $y=R(x)$ και το $G_f=\{(x,y): x\in A,\ y=f(x)\}$)

Μια απεικόνιση με πεδίο ορισμού το A και πεδίο αφίξεων το B συμβολίζεται με $f:A\to B$.

Αν $a\in A$ τότε το σύνολο $R^{\to}(\{a\})$ θα απαρτίζεται από ένα στοιχείο του B το οποίο συμβολίζεται με $f(a)$ την λεγόμενη <u>τιμή της f στο a</u> ή <u>εικόνα του a υπό την απεικόνιση f</u>.

Είναι ξεκάθαρο από τον όνομα "απεικόνιση" ότι αν έχουμε σκοπό να περιγράψουμε την την απεικόνιση f πρέπει να γνωρίζουμε το πεδίο ορισμού της και το πεδίο αφίξεων και επίσης για κάθε στοιχείο a στο πεδίο ορισμού της να μπορούμε να περιγράψουμε το μοναδικό στοιχ. b_a του πεδίου αφίξεων έτσι ώστε (a,b_a) να ανήκει στο γράφημα της f. Ουσιαστικά, πρέπει να περιγράψουμε $\forall a\in A$ την εικόνα του μέσω της f

Ας είναι $f=((A,B),R)$ απεικόνιση από το A στο B

Τότε $\forall X\subseteq A$ ορίζουμε το $R^{\to}(X)\subseteq B$ ως το σύνολο $f^{\to}(X)$.

Εάν $a\in A$, έχουμε

$f^{\to}(\{a\})=\{f(a)\}$.

Επίσης $\forall Y\subseteq B$ ορίζουμε το $R^{\leftarrow}(Y)\subseteq A$ ως το σύνολο $f^{\leftarrow}(Y)$

Εάν $f=((A,B),R)$ απεικόνιση από το $A\to B$ και $A_1\subseteq A$

Τότε $f|A_1 := ((A_1,B), R\cap(A_1\times B))$ περιορισμός της f στο A_1

Εστω $f = ((A,B),R)$ απεικονιση
- f επι εαν $\mathcal{R}(R) = B$
  Συμπερασματικα, καθε στοιχειο του B ειναι εικονα τουλαχιστον ενος στοιχειου του A, υπο την f (ολα τα στοιχεια του B θα "χτυπιουνται" απο καποιο στο A)
- f 1-1 εαν R^{-1} συναρτηση
  Ετσι, η f 1-1 αν.ν $(\forall b \in \mathcal{R}(R))(\exists! a \in A) : (b,a) \in R^{-1}$
  ($(a,b) \in R \xrightarrow{R \text{ συναρτ.}} b = f(a)$)
  Αρα f ειναι 1-1 αν.ν καθε στοιχειο του πεδιου τιμων της R ειναι και εικονα ενος ακριβως στοιχειου του A, υπο την f.
  Επιπλεον, η f ειναι 1-1 $\Leftrightarrow$ οταν $f(a_1) = f(a_2)$ με $a_1, a_2 \in A \Rightarrow a_1 = a_2$

(• Εστω $f : A \xrightarrow[1-1]{\text{επι}} B$ τοτε τα A και B ισοδυναμα)

- Εστω $f = ((A,B),R)$ απεικονιση, τοτε $((B,A),R^{-1})$ ειναι απεικονιση αν.ν f ειναι 1-1 & επι
  (ή ολικως οριζεται)

  Ετσι, σε αυτη την περιπτωση γραφουμε $f^{-1} = ((B,A),R^{-1})$ και λεγεται αντιστροφη απεικονιση της f

Ασκηση 30 (Ισοδύναμια διάμεσα στα (i) και (ii))

Έστω $f: A \to B$ τότε η f είναι 1-1 αν.ν $\exists g: B \to A$ έτσι ώστε $g \circ f = I_A$

Απόδειξη

($\Rightarrow$): Έστω η f είναι 1-1 και $a_0 \in A$

Θεωρώ τη σχέση:

$$S = \{ z : (\exists b)(\exists a)\ f(A) \ni b \wedge (z = (b,a) \wedge f(a) = b)$$
$$\vee\ (\exists b)\ f(A) \not\ni b \wedge z = (b, a_0) \}$$

Αυτό το σύνολο πράγματι αποτελεί μία συνάρτηση μεταξύ των B και A συνόλων όπου $B = \mathcal{D}(S)$ και $\mathcal{R}(S) \subseteq A$. Τότε η $g = ((B,A), S)$ είναι μία απεικόνιση μεταξύ των B και A, και λόγω ότι η f είναι 1-1 τότε $g \circ f = I_A$.

($\Leftarrow$) Έστω $f: A \to B$ και $g: B \to A$ με $g \circ f = I_A$

$f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow g(f(x_1)) = g(f(x_2)) \Rightarrow$

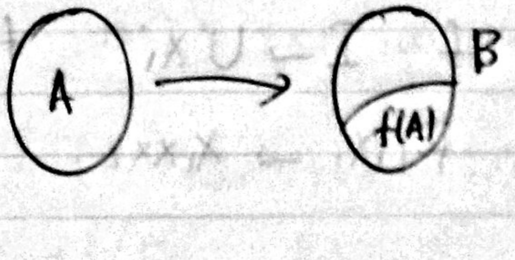
$\Rightarrow I_A(x_1) = I_A(x_2) \Rightarrow x_1 = x_2$.

Σχόλιο 1

Συνεπώς, αν f είναι 1-1, τότε η f αντιστρέφεται από τα αριστερά

Σχόλιο 2

Παραπάνω θεωρώ το σύνολο S γιατί σε μια απεικόνιση είδαμε ότι η συναρτησιακή σχέση είναι το γράφημα της απεικόνισης. Δηλαδή, το S θα περιέχει εκείνα τα διατεταγμένα ζεύγη (b,a) τ/ω $b \in f(A) \subseteq B$ και με $f(a) = b$ ή εκείνα τα ζεύγη (b, a_0) για τα οποία $b \notin f(A)$ αλλά $b \in (B - f(A))$.



$G_f = \{(x,y) : x \in A, y = f(x)\}$

ΟΙΚΟΓΕΝΕΙΕΣ ΣΥΝΟΛΩΝ

Ορισμός: Έστω I, A κλάσεις και $F: I \to A$ μια συνάρτηση. Το I είναι μια κλάση δεικτών και το A μια κλάση αφίξεων. Το σύνολο τιμών της F λέγεται οικογένεια στο A. Συμβολισμός: $(F_i)_{i\in I}$.

• Στις ακολουθίες γράφουμε $(a_\nu)_{\nu \in \mathbb{N}}$, δηλαδή εννοούμε την συνάρτηση $a: \mathbb{N} \to \mathbb{R}$, οπότε οι ακολουθίες είναι οικογένειες στο $\mathbb{R}$.

• Συγκεκριμένα λέμε οικογένεια υποσυνόλων του E με δείκτη $i \in I$, κάθε οικογένεια συνόλων στο δυναμοσύνολο $\mathcal{P}(E)$.
Εάν, λοιπόν F είναι μια τέτοια οικογένεια τότε γράφουμε:
$F(i) = (A_i)_{i \in I}$, όπου $A_i \in \mathcal{P}(E)$.

Π.χ. Αν G μια συλλογή υποσυνόλων του E, τότε η διαγώνιος Δ_G είναι μια οικογένεια υποσυνόλων του E. ($\Delta_G = \{(A,A) : A \in G\}$) ($G$ οικογένεια)...

Ορισμός: Έστω $(A_i)_{i\in I}$ μια οικογένεια υποσυνόλων του E, τότε το σύνολο $\bigcup_{i\in I} A_i := \{x \mid (\exists i \in I) : x \in A_i\}$ καλείται ένωση της οικογένειας $(A_i)_{i\in I}$

• Δηλαδή, πρακτικά όταν ένα σύνολο ανήκει στην ένωση σημαίνει πως αυτό ανήκει τουλάχιστον σ' ένα απ' όλα τα σύνολα.

Π.χ. Αν $G \subseteq E$, G μια συλλογή τότε $\bigcup \Delta_G = \bigcup_{A \in G} A = \bigcup G$

Ορισμός: Έστω $(A_i)_{i\in I}$ μια οικογένεια υποσυνόλων του E, τότε το σύνολο $\bigcap_{i\in I} A_i := \{x \mid (\forall i \in I) : x \in A_i\}$ καλείται τομή της οικογένειας $(A_i)_{i\in I}$

• Πρακτικά όταν ένα σύνολο ανήκει στην τομή, τότε αυτό ανήκει σ' όλα τα σύνολα της οικογένειας.

Π.χ. $G \subseteq E$, G μια συλλογή, τότε $\bigcap \Delta_G = \bigcap_{A \in G} A = \bigcap G$

Παρατήρηση: Αν $I = \emptyset \Rightarrow \bigcap_{i \in I} A_i = E$.

Ασκ.40

Έστω $(X_i)_{i\in I}$ οικογένεια $X_i \subseteq E$ και $f: K \xrightarrow{\text{επί}} I$. Ν.δ.ό

i) $\bigcup_{k\in K} X_{f(k)} = \bigcup_{i\in I} X_i$ ii) $\bigcap_{k\in K} X_{f(k)} = \bigcap_{i\in I} X_i$

Λύση (⊆)

ii) ($\Rightarrow$) $(\subseteq)$ Έστω $x \in \bigcap_{k \in K} X_{f(k)} \Rightarrow (\forall k \in K): x \in X_{f(k)}$.

Έστω τυχόν $i \in I \xRightarrow{f\ \text{επί}} (\exists k_0 \in K): f(k_0) = i$ $\Bigg\} \Rightarrow$

Άρα $(\forall i \in I): x \in X_{f(k_0)} \Rightarrow x \in X_i \Rightarrow x \in \bigcap_{i \in I} X_i$ ✓

$(\supseteq)$ ($\Leftarrow$) Έστω $x \in \bigcap_{i \in I} X_i \Rightarrow (\forall i \in I): x \in X_i$

Έστω τυχόν $k \in K \Rightarrow f(k) \in I$ $\Bigg\} \Rightarrow$

$(\forall k \in K): x \in X_{f(k)} \Rightarrow x \in \bigcap_{k \in K} X_{f(k)}$

Ασκ. 41

Έστω $(X_i)_{i \in I}$ οικογένεια, $X_i \subseteq E$ και $I = \bigcup_{k \in K} J_k$. Ν.δ.ό

i) $\bigcup_{i \in I} X_i = \bigcup_{k \in K} \left(\bigcup_{i \in J_k} X_i \right)$ ii) $\bigcap_{i \in I} X_i = \bigcap_{k \in K} \left(\bigcap_{i \in J_k} X_i \right)$

Λύση

$(\subseteq)$: Έστω $x \in \bigcup_{i \in I} X_i \Rightarrow (\exists i_0 \in I): x \in X_{i_0}$

$i_0 \in I = \bigcup_{k \in K} J_k \Rightarrow (\exists k_0 \in K): \boxed{i_0 \in J_{k_0}}$, όπου $\boxed{x \in X_{i_0}} \Rightarrow x \in \bigcup_{i \in J_{k_0}} X_i$

$\Rightarrow x \in \bigcup_{k \in K} \left(\bigcup_{i \in J_k} X_i \right)$.

($\supseteq$): Έστω $x \in \bigcup_{k\in K}\left(\bigcup_{i\in J_k} X_i\right) \Rightarrow (\exists k_0 \in K): x \in \bigcup_{i\in J_{k_0}} X_i \Rightarrow$ ③

$(\exists k_0 \in K) \wedge (i_0 \in J_{k_0}): x \in X_{i_0}$

Όμως, $J_{k_0} \subseteq I = \bigcup_{k\in K} J_k$ $\Big\}$ $\exists (i_0 \in I): x \in X_{i_0} \Rightarrow x \in \bigcup_{i\in I} X_i$

ii) ($\subseteq$): Έστω $x \in \bigcap_{i\in I} X_i \Rightarrow (\forall i \in I): x \in X_i$

$i \in I = \bigcup_{k\in K} J_k \Rightarrow (\forall k \in K)$: $i \in J_k$, όπου $x \in X_i \Rightarrow x \in \bigcap_{i\in J_k} X_i \Rightarrow$

$(\forall k \in K): x \in \bigcap_{i\in J_k} X_i \Rightarrow x \in \bigcap_{k\in K}\left(\bigcap_{i\in J_k} X_i\right)$

($\supseteq$): Έστω $x \in \bigcap_{k\in K}\left(\bigcap_{i\in J_k} X_i\right) \Rightarrow (\forall k \in K): x \in \bigcap_{i\in J_k} X_i$

Έστω τυχόν $i \in I$, τότε $I = \bigcup_{k\in K} J_k \Rightarrow \exists (k_0 \in K): i \in J_{k_0}$

Τώρα, $x \in \bigcap_{i\in J_{k_0}} X_i \Rightarrow x \in X_i, \forall i \in J_{k_0} \subseteq \bigcup_{k\in K} J_k = I \Rightarrow (\forall i \in I): x \in X_i \Rightarrow x \in \bigcap_{i\in I} X_i$

<u>Ασκ. 42</u>

Έστω $(R_i)_{i\in I}$ οικογένεια σχέσεων μεταξύ των συνόλων A και B.
Έστω, επίσης S μια σχέση των B και Γ. Ν.δ.ό

$$S \circ \left(\bigcup_{i\in I} R_i\right) = \bigcup_{i\in I} (S \circ R_i)$$

<u>Λύση</u>

[$\sigma: A \to B, r: \Gamma \to \Delta : r \circ \sigma = \{(x,y) \in A \times \Delta \mid \exists z \in B \cap \Gamma : x \sigma z \wedge z r y\}$

($\subseteq$):

Έστω $(x,y) \in S \circ \left(\bigcup_{i\in I} R_i\right) \Leftrightarrow$

$(\exists z \in B): (x,z) \in \bigcup_{i\in I} R_i \wedge (z,y) \in S \Leftrightarrow$

$(\exists z \in B)(\exists i_0 \in I): (x,z) \in R_{i_0} \wedge (z,y) \in S \Leftrightarrow$

$(x,y) \in S \circ R_{i_0} \Leftrightarrow (x,y) \in \bigcup_{i\in I} (S \circ R_i)$

$(\exists i_0 \in I)$

Ασκ. 43

Ας είναι $(f_i)_{i\in I}$ οικογένεια συναρτήσεων τέτοιων ώστε για κάθε i, j σε I να ισχύει: $f_i(x) = f_j(x)$, $\forall x \in D(f_i) \cap D(f_j)$.

Ν.δ.ό $\exists F: D(F) = \bigcup_{i\in I} D(f_i)$ και $F(x) = f_i(x)$, $\forall x \in D(f_i)$

Λύση

Θεωρώ τη σχέση $F = \{(x,y): [x \in D = \bigcup D(f_i)] \wedge [(\exists i)(i \in I \wedge x \in D(f_i)) \wedge ((x,y) \in f_i)]\}$

Θ.δ.ό F συνάρτηση.

Αν xFy και xFy', αρκεί ν.δ.ό $y = y'$

Έστω $x \in D$ και μάλιστα $x \in \bigcup D(f_i)$ και $(x,y) \in f_i$

$(x,y) \in F \Rightarrow (\exists i \in I): x \in \bigcup_{i\in I} D(f_i)$ και $(x,y) \in f_i$

$(x,y') \in F \Rightarrow (\exists j \in I): x \in \bigcup_{j\in I} D(f_j)$ και $(x,y') \in f_j$

Από την υπόθεση $f_i(x) = f_j(x) \Rightarrow y = y' \Rightarrow F$ συνάρτηση.

Τώρα, $\forall x \in D(f_i)$ έχουμε $(x, f_i(x)) \in f_i \Rightarrow (x, f_i(x)) \in F \Rightarrow$

$\Rightarrow F(x) = f_i(x)$.

Καρτεσιανό Γινόμενο Οικογένειας

Είδαμε ότι το καρτεσιανό $A \times B = \{(x,y): x \in A \wedge y \in B\}$. Ο ορισμός αυτός μπορεί να επεκταθεί για πεπερασμένο αριθμό συνόλων $A_1 \times A_2 \times \dots \times A_\nu$ των $A_1, A_2, \dots, A_\nu$, έτσι ώστε το καρτεσιανό γινόμενο $A_1 \times A_2 \times \dots \times A_\nu$ των συνόλων $A_1, A_2, \dots, A_\nu$ να είναι το σύνολο όλων των διατεταγμένων ν-άδων $(a_1, a_2, \dots, a_\nu)$, $a_i \in A_i$, $i = 1, 2, \dots, \nu$.

Στην περίπτωση μιας οικογένειας συνόλων, παρατηρούμε ότι στην περίπτωση του καρτεσιανού γινομένου $A_1 \times A_2 \times \dots \times A_\nu$, έχουμε το καρτεσιανό γινόμενο της οικογένειας $\{A_1, A_2, \dots, A_\nu\}$ με σύνολο δεικτών $I = \{1, 2, \dots, \nu\}$.

Δηλαδή μια συνάρτηση:

$$\begin{array}{ccl} x & & f(x) \\ 1 & \longrightarrow & a_1 \in A_1 \\ 2 & \longrightarrow & a_2 \in A_2 \\ \vdots & & \\ \nu & \longrightarrow & a_\nu \in A_\nu \end{array}$$

, όπου $f: I \longrightarrow \bigcup_{i\in I} A_i$

Ορισμός: Το καρτεσιανό γινόμενο μιας οικογένειας συνόλων A_i, $i \in I$ συμβολίζεται με $\underset{i\in I}{\times} A_i$ και είναι το σύνολο:

$$\underset{i\in I}{\times} A_i = \{f : f: I \to \bigcup_{i\in I} A_i, \text{ με } f(i) \in A_i, i \in I\}$$

ισμός: Αν $a \in \underset{i\in I}{\times} A_i$ και $j \in I$, ονομάζουμε j-συνιστώσα του τοιχείου a, την τιμή $a(j)$ και θέτουμε $a(j)=a_j$

Π.χ.

$A_1=\{1,2\}$, $A_2=\{3,5,7\}$

$A_1\times A_2=\{f \mid f: I=\{1,2\}\to A_1\cup A_2=\{1,2,3,5,7\}$, με $f(1)\in A_1$ και $f(2)\in A_2\}=$

$=(f(1)=1$ ή $f(1)=2)\wedge(f(2)=3$ ή $f(2)=5$ ή $f(2)=7)=$

$=\{(1,3),(1,5),(1,7),(2,3),(2,5),(2,7)\}$

Ορισμός

Για κάθε $j \in I$ ορίζουμε την απεικόνιση $\Pi_j : \underset{i \in I}{\times} A_i \to A_j$ τ.ώ. $\Pi_j(f) = f(j)$ και την ονομάζουμε j-προβολή του $\underset{i \in I}{\times} A_i$

Άσκηση 45

Έστω $(A_i)_{i \in I}$ οικογένεια συνόλων και $P = \underset{i \in I}{\times} A_i$ και A ένα τυχόν σύνολο. Ας είναι $(f_i)_{i \in I}$ μια οικογένεια απεικονίσεων από το A στο A_i, $\forall i \in I$. Νδο.

$\exists!\, f: A \to P$ τω $\Pi_i \circ f = f_i$

Αποδ.

$1 \mapsto f(1) = a_1 \in A_1$
$2 \mapsto f(2) = a_2 \in A_2$
$\vdots$

Ύπαρξη:

$f: A \to P$ δηλ $f(a) \in P = \bigtimes_{i \in I} A_i$

άρα το $f(\alpha)$ είναι απεικόνιση από το I στην $\bigcup_{i\in I} A_i$ με $(f(\alpha))(i) \in A_i$

Θεωρώ $f_a: I \to \bigcup A_i$ με $f_a(i) = f_i(a) \in A_i$

Δηλ. πρέπει η f_a να "στέλνει" το i σε ένα στοιχείο που να ανήκει κάθε φορά στο αντίστοιχο A_i

Άρα, η $f: A \to P$ θα έχει τη μορφή $\boxed{f(\alpha) = f_\alpha}$

Επομένως $\exists\, f: A \to P$.
Θδο η f πληροί τη συνθήκη $(\Pi_i \circ f)(a) = f_i(a)$ $\forall a$
Δηλ. $\Pi_i(f(\alpha)) = f_i(\alpha)$, $\forall a$.

$\Pi_i : \bigtimes_{i \in I} A_i \to A_i$ όπου $\Pi_i(f) := f(i)$

Άρα,
$$\Pi_i(f(\alpha)) = \Pi_i(f_\alpha) = f_\alpha(i) = f_i(\alpha), \ \forall \alpha \in A$$

Άρα, $(\Pi_i \circ f) = f_i$ $\qquad \alpha \xmapsto{f} f(\alpha) \xmapsto{\Pi_i} (f(\alpha))(i)$

Για το μονοσήμαντο: Έστω $\exists\, g: A \to P$ τω
$\Pi_i \circ g = f_i \Rightarrow \Pi_i(g(\alpha)) = f_i(\alpha)$ (Θδο $f = g$)
Αλλά
$$(f(\alpha))(i) = (\Pi_i \circ f)(\alpha) = f_i(\alpha) = (\Pi_i \circ g)(\alpha) = (g(\alpha))(i) = \Pi_i(g(\alpha))$$
$f(\alpha) = g(\alpha)$, $\forall \alpha \in A$

Άσκηση 46

Έστωσαν, $K \neq \emptyset$, $(J_k)_{k \in K}$ οικογένεια συνόλων $\neq \emptyset$ για κάθε $k \in K$. Εάν $I = \underset{k \in K}{X} J_k$ και $((X_{i,k})_{i \in J_k})_{k \in K}$ οικογένεια οικογενειών των συνόλων $X_{i,k}$

ΝΔΟ: $\bigcup_{k \in K} \left(\bigcap_{i \in J_k} X_{i,k} \right) = \bigcap_{f \in I} \left(\bigcup_{k \in K} X_{f(k),k} \right)$

Απόδειξη

Έστω $f \in I$

Ας είναι $x \in \bigcup_{k \in K} \left(\bigcap_{i \in J_k} X_{i,k} \right) \Rightarrow \exists k_0 \in K : x \in \bigcap_{i \in J_{k_0}} X_{i,k_0} \Rightarrow$

$\Rightarrow (\exists k_0 \in K)(\forall i \in J_{k_0}) : x \in X_{i,k_0}$

Άρα $f \in I \Rightarrow f = (f_1^{(k)}, f_2^{(k)}, \dots)$

Επίσης, $i \in J_{k_0} \Rightarrow f_i(k_0) = i$

Συνεπώς, $x \in X_{f(k_0),k_0} \Rightarrow x \in \bigcup_{k \in K} X_{f(k),k}, \forall f \in I$

$\Rightarrow x \in \bigcap_{f \in I} \left(\bigcup_{k \in K} X_{f(k),k} \right)$

Από την άλλη μεριά

Έστω, $x \in \bigcap_{f \in I} \left(\bigcup_{k \in K} X_{f(k),k} \right)$ και $x \notin \bigcup_{k \in K} \left(\bigcap_{i \in J_k} X_{i,k} \right) \Rightarrow$

$\Rightarrow (\forall k \in K)\ x \notin \bigcap_{i \in J_k} X_{i,k} \Rightarrow (\forall k \in K)(\exists j_k \in J_k)\ x \notin X_{j_k,k}$

Σταθεροποιώ, $f_1 \in I = \prod_{k \in K} J_k$ με $f_1(k) = j_k$, $\forall k \in K$

Τότε, $\forall k \in K$ $x \notin X_{f_1(k),k} \Rightarrow x \notin \bigcup_{k \in K} X_{f_1(k),k} \Rightarrow$

$\Rightarrow x \notin \bigcap_{f \in I} \left(\bigcup_{k \in K} X_{f(k),k} \right)$ άτοπο

Εφαρμογή (εργασία) για $K = \{1,2\}$, $J_1 = \{1\}$, $J_2 = \{1,2\}$

$f=(a_1,a_2)$

$1 \xmapsto{f} f(1)=a_1$

$2 \xmapsto{f} f(2)=a_2$

Εφαρμογή στην Άσκηση 46.

Συμπέρασμα της Άσκησης 46:

Για $I=\prod_{i\in J_k} J_k$, K σύνολο δεικτών, ισχύει

$$\bigcup_{k\in K}\left(\bigcap_{i\in J_k} X_{i,k}\right)=\bigcap_{f\in I}\left(\bigcup_{k\in K} J_{f(k),k}\right)$$

Ας θεωρήσουμε λοιπόν $K=\{1,2\}$, $J_1=\{1\}$, $J_2=\{1,2\}$

$$I=\prod_{k\in K} J_k=\{f \,/\, f:\{1,2\}\to J_1\cup J_2=\{1,2\} \text{ με } f(1)\in J_1 \text{ και } f(2)\in J_2\}=$$

$$=\{f_i\}_{i=1,2} \,|\, (f_1(1)=1,\ f_1(2)=1) \text{ και } (f_2(1)=1;\ f_2(2)=2)\}=$$

$$=\{(1,1),(1,2)\}$$

Έτσι, $\bigcap_{i\in J_1} X_{i,1}=X_{1,1}$ & $\bigcap_{i\in J_2} X_{i,2}=X_{1,2}\cap X_{2,2}$

$$\bigcup_{k\in K}\left(\bigcap_{i\in J_k} X_{i,k}\right)=X_{1,1}\cup(X_{1,2}\cap X_{2,2}).$$

Από την άλλη,

$\bigcup_{k\in K} X_{f_1(k),k}=X_{1,1}\cup X_{1,2}$ & $\bigcup_{k\in K} X_{f_2(k),k}=X_{1,1}\cup X_{2,2}$

$$\bigcap_{f\in I}\left(\bigcup_{k\in K} X_{f(k),k}\right)=(X_{1,1}\cup X_{1,2})\cup(X_{1,1}\cup X_{2,2})=$$

$$=X_{1,1}\cup(X_{1,2}\cup X_{2,2})$$

Αξιωματική Θεμελίωση των συνόλων
Συνάρτηση - Σύνολο Επιλογής.

Ορισμός 1:

Έστω $(E_i)_{i\in I}$ μία οικογένεια μη κενών συνόλων
Η απεικόνιση $f: I \to \bigcup_{i\in I} E_i$, έτσι ώστε για κάθε $i \in I$
με $f(i) \in E_i$ ονομάζεται συνάρτηση επιλογής
Για αυτό το λόγο $f \in \times_{i\in I} E_i$

Ορισμός 2:

perwise disjoint

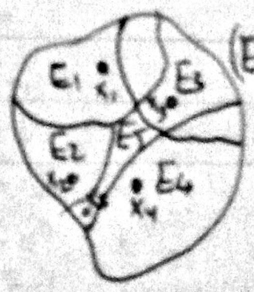
Εάν $E_i \cap E_j = \emptyset$, $\forall (i,j) \in I\times I$ $(i \neq j)$ (δηλαδή, η οικογένεια $(E_i)_{i\in I}$ είναι όπως τη λέμε ξένη ανά δύο), τότε το Πεδίο τιμών της συνάρτησης επιλογής για την $(E_i)_{i\in I}$ είναι ένα $\subseteq \bigcup_{i\in I} E_i$ που περιέχει ακριβώς ένα στοιχείο από κάθε σύνολο $E_i, i\in I$. Το σύνολο αυτό το λέμε σύνολο επιλογής για την ξένη ανά δύο οικογένεια $(E_i)_{i\in I}$.

Παράδειγμα (Συνάρτηση επιλογής)

Έστω το σύνολο δεικτών $I = \{1,2,3\}$ και τα σύνολα
$A_1 = \{1,3\}$, $A_2 = \{5,6,7\}$, $A_3 = \{1,9\}$
Τότε η [redacted] απεικόνιση:
$f: \{1,2,3\} = I \to A_1 \cup A_2 \cup A_3 = \{1,3,5,6,7,9\}$ με γράφημα
το $G_f = \{(1,1),(2,6),(3,9)\}$ → Σύνολο επιλογής $\{1,6,9\}$.
Είναι μία συνάρτηση επιλογής για την οικογένεια
$(A_i)_{i\in I = \{1,2,3\}}$ αφού έχουμε ότι:
$f(1) \in A_1$, $f(2) \in A_2$, $f(3) \in A_3$.

Φαίνεται δηλαδή, ότι μία συνάρτηση επιλογής επιλέγει από κάθε μέλος (ή σύνολο) της οικογένειας συνόλων ένα ακριβώς στοιχείο

Το σύνολο της επιλογής είναι το σύνολο που έχει ένα και μόνο ένα κοινό στοιχείο με κάθε σύνολο της επιλογής



$(E_i)_{i\in I}$

Ο ισχυρισμός της ύπαρξης τουλάχιστον μίας συνάρτησης επιλογής για μία οικογένεια μή κενών συνόλων είναι γνωστή ως το "<u>αξίωμα της επιλογής</u>"

Συνεπώς, ένας ισοδύναμος ορισμός ή αξίωμα του αξιώματος της επιλογής είναι ότι:
Το καρτεσιανό γινόμενο μιας οικογένειας συνόλων είναι ένα <u>μη</u> κενό σύνολο

<u>ΙΣΟΔΥΝΑΜΑ</u>
Υπάρχει μία συνάρτηση επιλογής για καθε οικογένεια μη κενών συνόλων

<u>ΙΣΟΔΥΝΑΜΑ</u>
Υπάρχει ένα σύνολο επιλογής για κάθε οικογένεια μή κενών συνόλων.

$R^{\rightarrow}(A) = \{y : (\exists x)(x \in A \wedge (x,y) \in R)\}$

Άσκηση 47

Ας είναι f απεικόνιση από το $A \neq \emptyset$ στο $B \neq \emptyset$

Νδο τα παρακάτω είναι ισοδύναμα:

$g: B \to A$

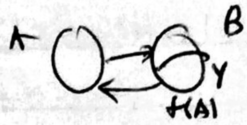
$I_B = ((B,B), P_B)$

i) f είναι επί

ii) $\exists\, g: B \to A$ τ/ω $f \circ g = I_B$ (δεξιά αντιστρέψιμη)

iii) ($\forall Y$ σύνολο)($\forall h_1, h_2 : B \to Y$) τ/ω $h_1 \circ f = h_2 \circ f \Rightarrow h_1 = h_2$

ΛΥΣΗ



(i ⇒ ii) Έστω f επί τότε $\forall b \in B, \exists a \in A : f(a_b) = b$

Αυτό σημαίνει ότι το σύνολο:

$f^{\leftarrow}(\{b\}) = \{f^{-1}(b)\} \neq \emptyset \quad , \forall b \in B.$

Δηλ. για κάθε στοιχείο $b \in B$ υπάρχει αντίστροφο στοιχείο

Έτσι, από το αξίωμα της επιλογής υπάρχει μια συνάρτηση επιλογής για την οικογένεια $(f^{\leftarrow}(\{b\}))_{b \in B}$

δηλ. μια απεικόνιση: $g: B \to \bigcup_{b \in B} (f^{\leftarrow}(\{b\})) = A$

τέτοια ώστε $\underline{g(b) \in f^{\leftarrow}(\{b\})}$, $\forall b \in B$. Έτσι, για κάθε $b \in B$, έχουμε $f(g(b)) = b \Rightarrow f \circ g = I_B$

$g(b) = f^{-1}(b)$

(ii ⇒ iii): Έστω ότι $\exists g: B \to A$ τ/ω $f \circ g = I_B$

Ας είναι τυχόν Y και $h_1, h_2 : B \to Y$ τ/ω

$h_1 \circ f = h_2 \circ f \Rightarrow (h_1 \circ f) \circ g = (h_2 \circ f) \circ g \Rightarrow$

$\Rightarrow h_1 \circ (f \circ g) = h_2 \circ (f \circ g) \Rightarrow h_1 \circ I_B = h_2 \circ I_B \Rightarrow h_1 = h_2$

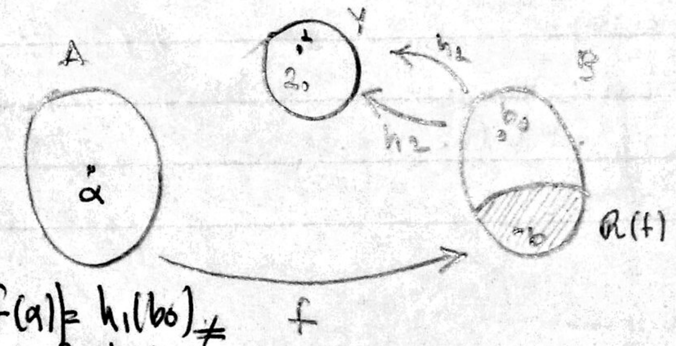
(iii ⇒ i): Έστω f όχι επί $\Rightarrow B \neq \mathcal{R}(f) \Rightarrow B \not\subseteq \mathcal{R}(f)$

Δηλ. τυχόν $b_0 \in B \Rightarrow b_0 \notin \mathcal{R}(f)$.

Έστω $Y = \{1, 2\}$ και $h_1 : B \to Y$ τ/ω $h_1(b) = 1$, $b \in B$

και $h_2 : B \to Y$ τ/ω $h_2(b) = 1$, $b \in \mathcal{R}(f)$ ή $h_2(b) = 2$, $b \notin \mathcal{R}(f)$

Τότε $h_1 \circ f = h_2 \circ f$ αλλά $h_1 \neq h_2$ (αφού $h_1(b_0) = 1$ αλλά $h_2(b_0) = 2$ διαφορετικές τιμές), άτοπο



- Η h_1 "στέλνει" όλα τα b στο B στην τιμή $1 \in Y$
- Η h_2 "στέλνει" όλα τα b στο $\mathcal{R}(f)$ στην τιμή $1 \in Y$ και όλα τα b που δεν ανήκουν στο $\mathcal{R}(f)$ στο $2 \in Y$

$= h_1(f(a)) = h_1(b_0) \neq$

$h_2(f(a)) = h_2(b_0)$

Άσκηση 48

Έστω $\mathcal{C}$ μια συλλογή μη κενή και ξένα ανά δύο μη κενών συνόλων. Ν.δ.ο. $\exists\, f_{1-1} : \mathcal{C} \to \cup\mathcal{C}$

Λύση

σύνολο

Έστω η οικογένεια $(x)_{x\in\mathcal{C}}$ μη κενών συνόλων

Τότε $\exists\, f$ συνάρτησης επιλογής και συγκεκριμένα μία απεικόνιση $s : \mathcal{C} \to \bigcup_{x\in\mathcal{C}} (x) = \cup\mathcal{C}$ τέτοια ώστε $\forall$ σύνολο x εντός της $\mathcal{C}$: $s(x) \in x$

Εάν $s(x_1) = s(x_2) \overset{s(x)\in x}{\Longrightarrow} s(x_1) \in x_1 \cap x_2 \overset{\text{αφού } x_1\cap x_2 = \emptyset}{\Longrightarrow} x_1 = x_2$